الفصل الأول

مفاهيم أساسية في الفيزياء

1 – مقدمة :

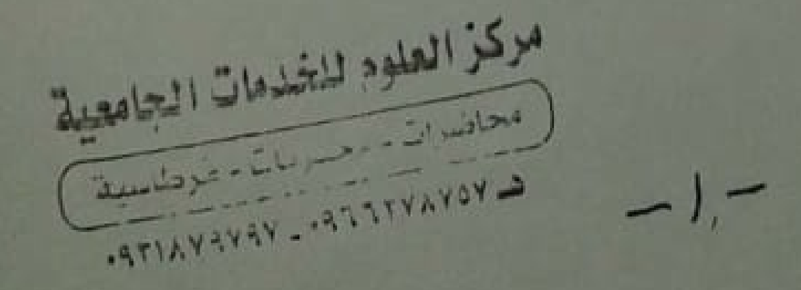
تبرز أهمية استخدام المتجهات عند دراسة الظواهر المختلفة المتعلقة بموضوعات الكهرومغناطيسية ، فإلى جانب الطرق الرياضية المستخدمة للتعبير عن أية معادلة بشكل مختصر ومفهوم هناك طرق أخرى تنسب للمتجهات ، وقد ساعدت بشكل كبير في التعرف على الأفكار والظواهر الفيزيائية المتعددة وأمكن من خلالها تقليل الكثير من الصعوبات وتبسيط التعقيدات باستعمال رموز ومصطلحات تحليل المتجهات . وفضلا عن ذلك فإن استخدام تحليل المتجهات يوضح الأفكار الفيزيائية التي تتضمنها المعادلات الرياضية .

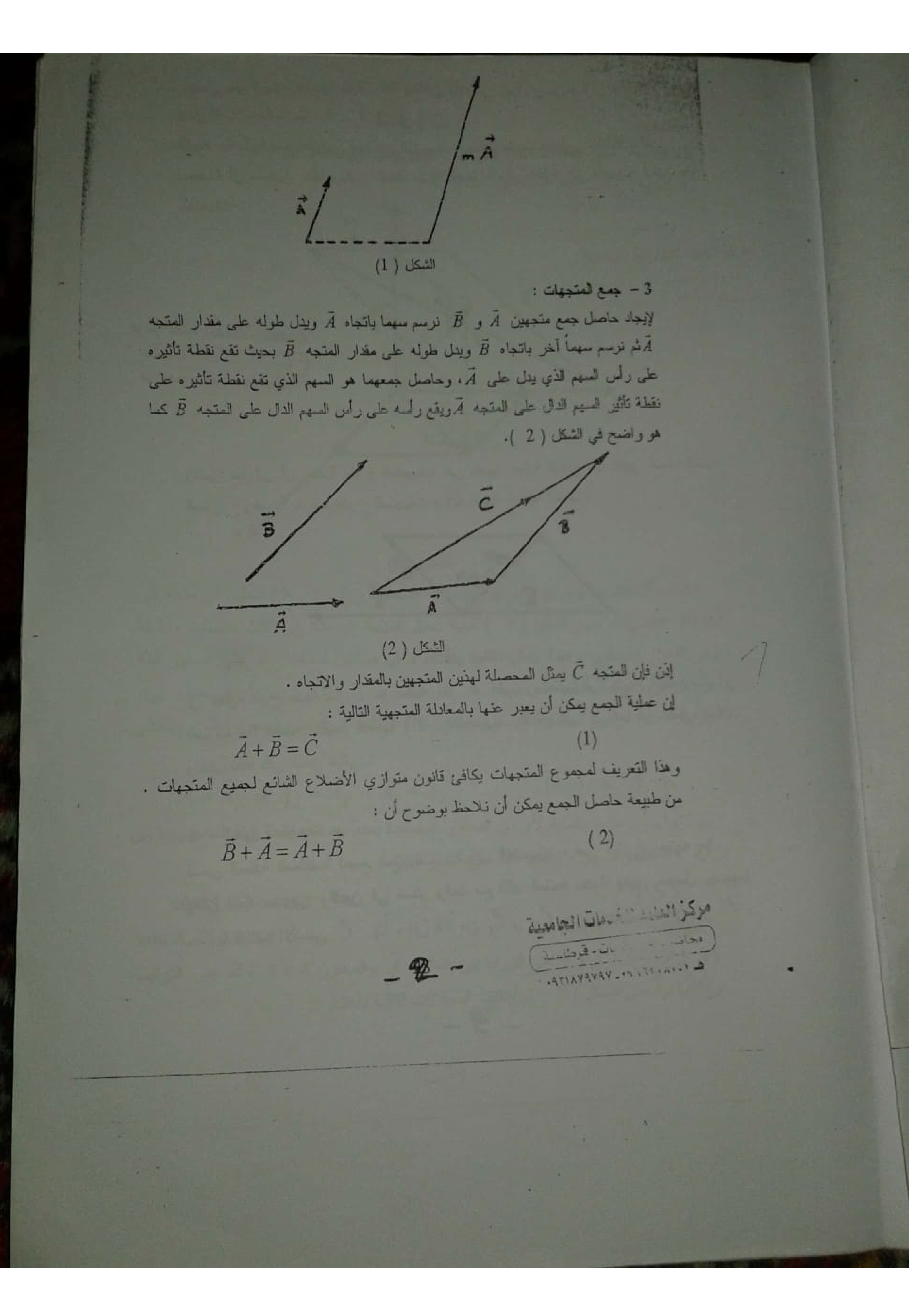
تقسم الكميات الفيزيائية إلى نوعين : مقادير سلمية Scalars والتي تعين تعيناً تاماً إذا عرف مقدارها فقط مثل درجة الحرارة ، الكتلة ، الزمن ، الكثافة وغيرها . ومقادير متجهة Vectors والتي لا يمكن تعيينها تعييناً تاماً إلا إذا عرف مقدارها والاتجاه الذي تؤثر فيه مثل السرعة ، التسارع ، القوة ، الحقل وغيرها .

يمكن تمثيل المقدار المتجه بسهم بين نقطتين حيث يدل البعد بينهما على القيمة العددية للمتجه ويدل اتجاه السهم على اتجاه المتجه ، وللتمييز بين المقادير السلمية والمتجهة نرمز للأولى بحروف مجردة وللثانية بحروف يعلوها سهم ، وهكذا فإن $\vec{A}$ يمثل متجها قيمته العددية تساوي A . وقد نأخذ في بعض الأحيان $|\vec{A}|$ للدلالة على مقدار المتجه $\vec{A}$ لذا فإن $|\vec{A}|$ يمثل قيمة عددية موجبة للمتجه .

2 – جداء متجه بكمية عددية :

إن حاصل ضرب متجه ما $\vec{A}$ بكمية عددية m يساوي عادة متجها رسم باتجاهه ومقداره يعادل m مرة من المتجه $\vec{A}$ إذا كانت m موجبة (الشكل 1 – 1) . أما إذا كانت m سالبة فهذا يعني أنّ له اتجاهاً معاكساً لاتجاه $\vec{A}$ وبالتالي فالمتجه $\overline{-A}$ يعد ناتجا عن ضرب الكمية العددية -1 والمتجه $\vec{A}$ وهو معاكس له بالاتجاه .





الشكل (1)

3 – جمع المتجهات :

لإيجاد حاصل جمع متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نرسم سهما باتجاه $\vec{A}$ ويدل طوله على مقدار المتجه $\vec{A}$ ثم نرسم سهماً آخر باتجاه $\vec{B}$ ويدل طوله على مقدار المتجه $\vec{B}$ بحيث تقع نقطة تأثيره على رأس السهم الذي يدل على $\vec{A}$، وحاصل جمعهما هو السهم الذي تقع نقطة تأثيره على نقطة تأثير السهم الدال على المتجه $\vec{A}$ ويقع رأسه على رأس السهم الدال على المتجه $\vec{B}$ كما هو واضح في الشكل (2).

الشكل (2)

إذن فإن المتجه $\vec{C}$ يمثل المحصلة لهذين المتجهين بالمقدار والاتجاه .

إن عملية الجمع يمكن أن يعبر عنها بالمعادلة المتجهية التالية :

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \qquad (1)$$

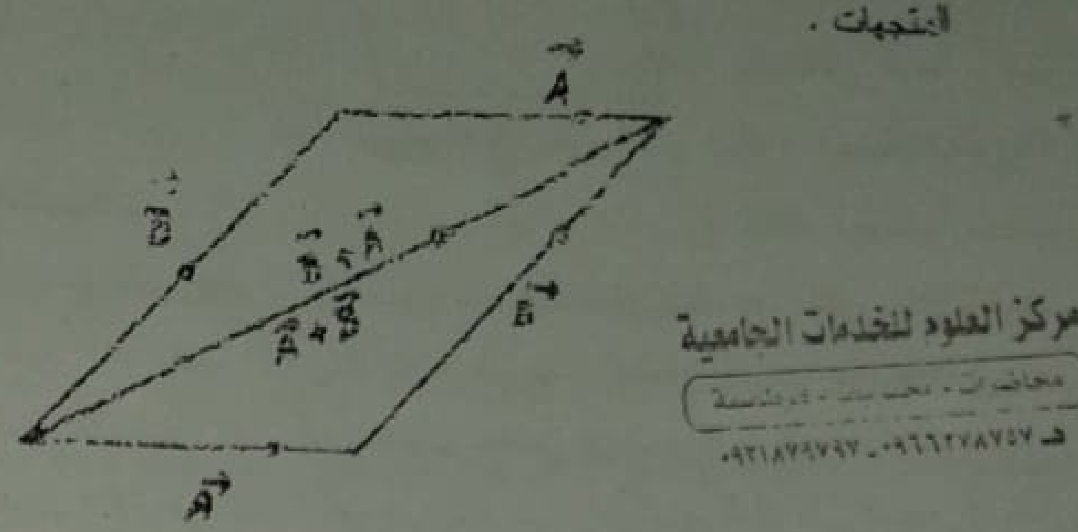
وهذا التعريف لمجموع المتجهات يكافئ قانون متوازي الأضلاع الشائع لجميع المتجهات .

من طبيعة حاصل الجمع يمكن أن نلاحظ بوضوح أن :

$$\vec{B}+\vec{A}=\vec{A}+\vec{B} \qquad (2)$$

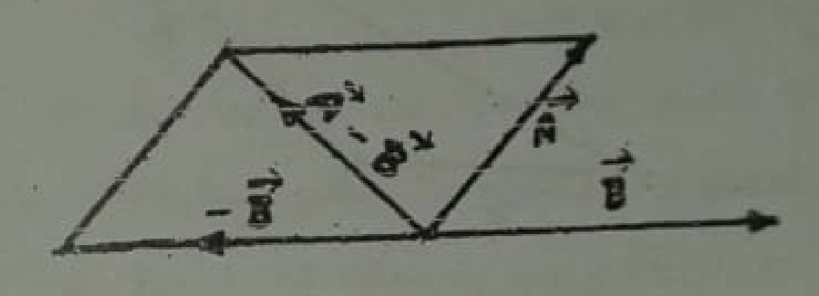
• وتسمى هذه العملية خاصية التبادل كما يلاحظ ذلك أي إكمال رسم متوازي الأضلاع الذي تمثل أضلاعه بالمتجهين $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ الشكل (3).

لإيجاد حاصل الجمع المتجهي لعدد من المتجهات تستخدم طريقة متوازي الأضلاع لاستخراج محصلة أي متجهين منها ويكون عندئذ طول السهم النهائي دلالة على محصلة جميع هذه المتجهات .



الشكل (3)

ونشير هنا إلى أن عملية طرح المتجهات هي نفسها عملية الجمع بعد تغيير اتجاه المتجه المطروح وهو ما يعرف بطرح المتجهات بدلالة القيمة السالبة للمتجهة .



الشكل (4)

إن عملية طرح متجه ما $\vec{B}$ من متجه آخر $\vec{A}$ تتم بأن نعكس أولاً اتجاه المتجه $\vec{B}$ أي نضرب هذا المتجه بالقيمة العددية (-1) ثم نضيف الناتج إلى $\vec{A}$ كما في الشكل (4).

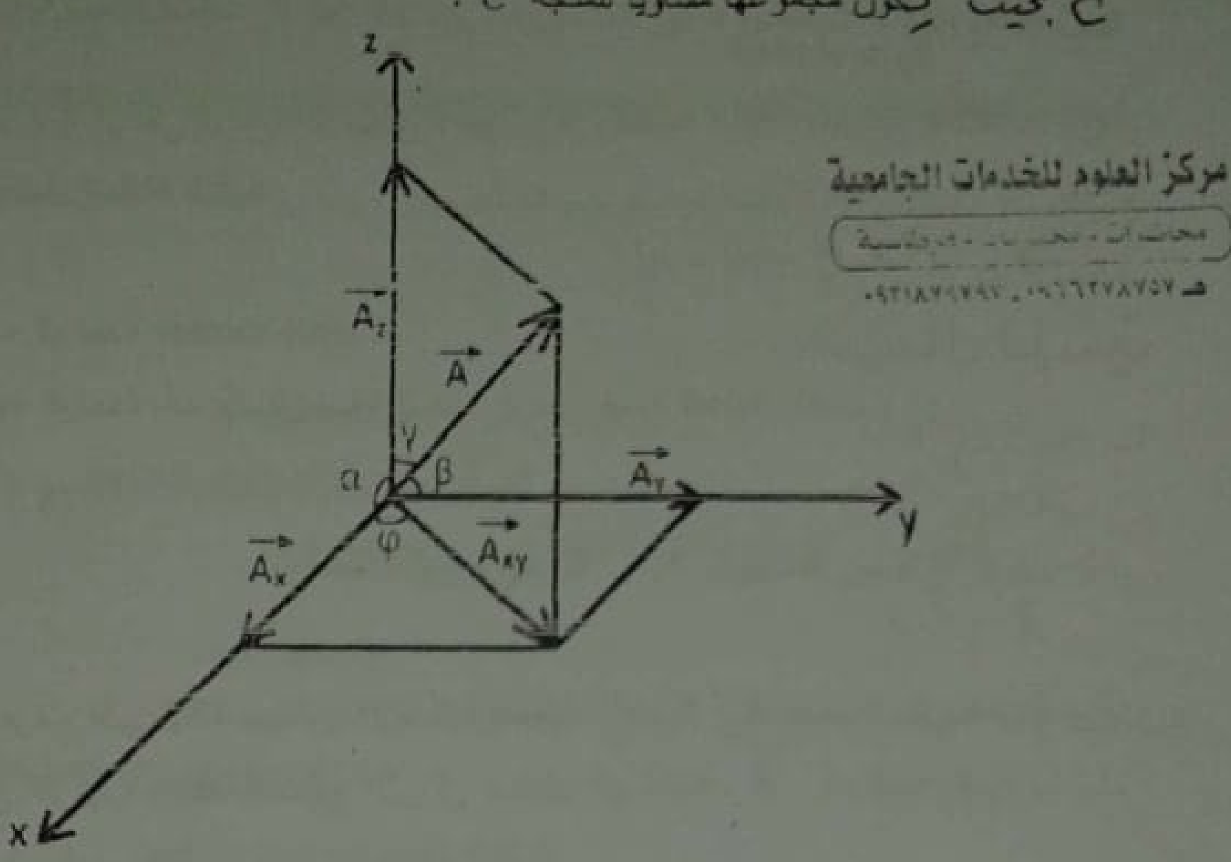
ونكتب ذلك على النحو التالي :

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(\overrightarrow{-B}) \qquad (3)$$

4 - تحليل المتجهات :

تسمى العملية المعاكسة لجمع المتجهات : تحليل المتجهات ، فمن أجل أي متجه مثل $\vec{C}$ يمكن إيجاد متجهين واقعين في مستوٍ واحد مع ذلك المتجه بحيث يكون حاصل جمعهما مساويا للمتجه الأصلي $\vec{C}$. إذاً ، فإنّ كلاً من $\vec{C}_1$ و $\vec{C}_2$ يعد مركبةً للمتجه الأصلي $\vec{C}$ ،

كما يمكن تعيين ثلاث متجهات ليس من الضروري أن تقع جميعها في مستوٍ واحد مع المتجه $\vec{C}$ بحيث يكون مجموعها مساوياً للمتجه $\vec{C}$.



الشكل (5)

ومن أجل ذلك تستخدم عادة المحاور الإحداثية المتعامدة (X , Y , Z) لتحليل أي متجه إلى ثلاثة متجهات، يبين الشكل (5) كيفية تحليل المتجه $\vec{A}$ مثلا إلى ثلاث متجهات منطبقة على هذه المحاور ، حيث يحلل المتجه $\vec{A}$ أولا إلى مركبين أحدهما $\vec{A}_Z$ على المحور OZ والأخرى $\vec{A}_{XY}$ والناتجة عن مسقط $\vec{A}$ على المستوي (XY) ومن ثم يتم تحليل $\vec{A}_{XY}$ بدوره إلى مركبين أحدهما $\vec{A}_Y$ على المحور OY والأخر $\vec{A}_X$ على المحور OX ، وبالتالي

$$\vec{A} = \vec{A}_{XY} + \vec{A}_Z = \vec{A}_X + \vec{A}_Y + \vec{A}_Z \qquad (4)$$

إن اتجاه أي متجه بالنسبة لأي من المحاور المتعامدة يحدد بعد معرفة الزاوية المحصورة بين ذلك المتجه والمحور ، ونكتب ذلك على النحو التالي :

$$\cos(A,X) = \cos\alpha \qquad (5)$$

$$\cos(A,Y) = \cos\beta$$

$$\cos(A,Z) = \cos\gamma$$

إن الزوايا α و β و γ هي الزوايا بين المتجه $\vec{A}$ والمحاور X ، Y ، Z على الترتيب، واعتماداً على الشكل (5 – 1) نكتب المعادلات التالية باعتبار :

$$A_X = A\sin\gamma\cos\varphi$$
$$A_Y = A\sin\gamma\sin\varphi \qquad (6)$$
$$A_Z = A\cos\gamma$$

حيث أن الزاوية φ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}_X$ والمتجه $\vec{A}_{XY}$. وبتربيع العلاقات (6) وجمعها تحصل العلاقة التالية :

$$A^2 = A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2 \qquad (7)$$

5 – متجه الواحدة Unit Vector :

نعرف متجه الواحدة بأنه حاصل قسمة المتجه $\vec{A}$ على قيمته العددية ونكتب :

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \qquad (8)$$
$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{a}$$

وبالتالي نعرف على جملة المحاور الإحداثية المتعامدة X, Y, Z متجهات الواحدة $\vec{k}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i}$ على الترتيب وبذلك نستطيع الآن أن نستبدل أي متجه $\vec{A}$ بمركباته الموازية لهذه المحاور على النحو التالي :

$$\vec{A} = A_X\vec{i} + A_Y\vec{j} + A_Z\vec{k} \qquad (9)$$

نقول عن المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ أنهما متساويان إذا تساوى مقدار كل منهما مع الآخر وكانا باتجاه واحد ونقول $\vec{A} = \vec{B}$

$$A_X\vec{i} + A_Y\vec{j} + A_Z\vec{k} = B_X\vec{i} + B_Y\vec{j} + B_Z\vec{k} \qquad (10)$$

ولكي تتساوى العلاقتان لابد أن تتساوى المركبات المتعامدة مع بعضها على التناظر أي أن :

$$A_Y = B_Y ,\quad A_X = B_X ,\quad A_Z = B_Z \qquad (11)$$

6 – الجداء السلمي لمتجهين Scalar Product :

يصادف في مواضيع الفيزياء كثيراً عملية جداء متجهين وأن عملية الجداء هذه قد تتضمن متجهات يختلف بعضها عن البعض الآخر بواحدات القياس ، فمثلا نعرف العمل بأنه حاصل ضرب الانتقال في مركبة القوة التي هي باتجاه الانتقال ، ونلاحظ أن عملية الضرب هذه ينتج منه كمية عددية هي العمل ، وهذا يمكننا من أن نجري عملية ضرب متجهين أو أكثر بحيث نحصل من عملية الضرب هذه على كمية عددية .

نعرف الجداء السلمي (العددي) لمتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ بالعلاقة التالية :

Scanned by CamScanner

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\theta \qquad (12)$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين . ونلاحظ هنا أن حاصل الضرب قد يكون كمية موجبة أو سالبة ، وذلك حسب قيمة الزاوية θ إذا كانت أصغر أو أكبر من $\frac{\pi}{2}$

يرمز للجداء السلمي عادة بنقطة توضع بين المضروبين ويسمى الجداء السلمي أحيانا بالجداء الداخلي

ويتصف الجداء السلمي بأنه :

١- تبديلي : أي أن $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

٢- توزيعي : أي أن $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

اذا كانت الزاوية θ بين المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ هي زاوية قائمة فإن :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$$

وعليه فإن متجهات الواحدة على المحاور الإحداثية تحقق العلاقتين التاليتين :

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \qquad (13)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

وعند التعبير عن المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما على المحاور الإحداثية المتعامدة فإن الجداء السلمي يعطى على النحو التالي :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_X\vec{i}+A_Y\vec{j}+A_Z\vec{k})\cdot(B_X\vec{i}+B_Y\vec{j}+B_Z\vec{k})$$
$$=A_XB_X+A_YB_Y+A_ZB_Z \qquad (14)$$

وبالتالي فإن حاصل الجداء السلمي للمتجه $\vec{A}$ في نفسه يكتب على النحو التالي :

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|\cdot|\vec{A}|=A^2=A_X^2+A_Y^2+A_Z^2 \qquad (15)$$

7- الجداء المتجهي لمتجهين :

نعرف مقدار عزم قوة ما حول محور معين بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة العمودية من المحور على خط تأثير تلك القوة ، وبما أن عزم القوة هو متجه ينتج من حاصل ضرب متجهين هي القوة والمسافة ، إذن لابد من البحث عن عملية مناسبة لحاصل الضرب كي تصف هذا العزم ، نعرف حاصل الضرب بين المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ حسب العلاقة التالية :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C} \qquad (16)$$

حيث أن الناتج هو متجه $\vec{C}$ تعطى قيمته العددية بالعلاقة التالية

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\alpha \qquad (17)$$

حيث α هي الزاوية المحصورة بين المتجهين ، أما المتجه $\vec{C}$ فيخضع لقاعدة اليد اليمنى ، إذ يحدد اتجاهه حسب اتجاه إبهام اليد اليمنى عندما تدور بقية أصابع اليد الأربع من المتجه $\vec{A}$ إلى المتجه $\vec{B}$. ويكون المتجه $\vec{C}$ عموديا على المستوي الذي يضم كلاً من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$.

نلاحظ أن حاصل الضرب المتجهي لا يخضع لقانون التبادل أي أن :

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (18)$$

ويمكن أن نبين هنا أن حاصل الضرب المتجهي يخضع لقانون التوزيع ، أي أن :

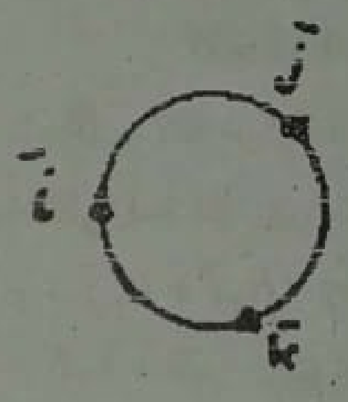
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad (19)$$

ويمكننا أن نلاحظ أن حاصل الضرب المتجهي لكل متجهين من متجهات الواحدة الأساسية $\vec{k}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i}$ مساوياً للصفر إذا كان المتجهان متماثلين . أي أن :

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \qquad (20)$$

ويكون مقدار حاصل الضرب لمتجهين متعامدين منهما مثل $\vec{i} \times \vec{j}$ مساويا للواحد إلا أن اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى يكون باتجاه المحور Z وعليه يكون :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad (21)$$



الشكل (6)

وهكذا بالنسبة للمتجهات الأخرى . لمعرفة اتجاه المتجه الحاصل من الضرب لمتجهات الواحدة نتبع طريقة الترتيب الدوري لهذه المتجهات . يوضح الشكل (6) ترتيب المتجهات $\vec{k}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{i}$ بطريقة دورية على دائرة مع حركة عقارب الساعة ، فإذا تحركنا باتجاه عقارب الساعة فإن جداء أي متجهين متجاورين هو المتجه الثالث وبالاتجاه الموجب وبالتالي نكتب :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \ ، \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \ ، \ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad (22)$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \ ، \ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \ ، \ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

ومن الضروري جداً معرفة حاصل الضرب المتجهي $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما المتعامدة لأهميته ذلك في مواضيع الكهرومغناطيسية ، فإذا اتبعنا الطرق التي سبق ذكرها في هذه الفقرة فإن عملية الضرب تكون على النحو التالي :

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة على شكل معين :

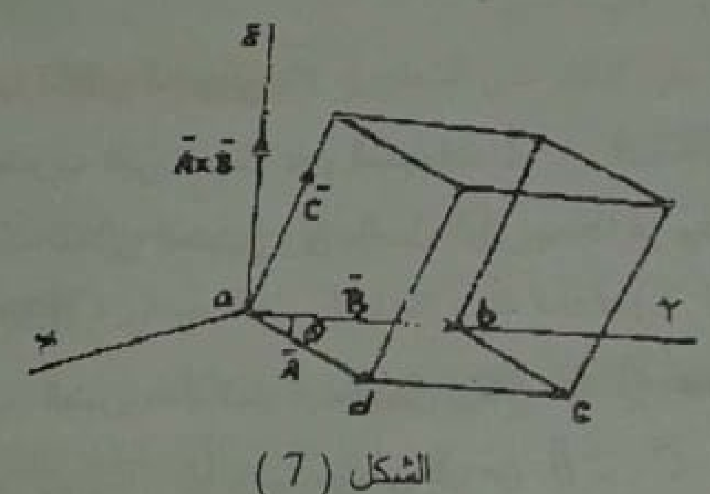
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (23)$$

8 – الضرب الثلاثي السلمي والمتجهي :

1 – الضرب الثلاثي السلمي :

إن عملية الضرب التي تحصل بين ثلاث متجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ بالصيغة التالية $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ تسمى الضرب الثلاثي السلمي وإن ناتج هذه العملية هو قيمة عددية .

لنتأمل الشكل (7) الذي يبين المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ حيث رسم المتجهان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ في المستوي XY ومن تعريف حاصل الضرب المتجهي نجد أن :



الشكل (7)

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\theta \qquad (24)$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ وهذه الكمية تساوي مساحة متوازي الأضلاع $abcd$ أما المتجه $\vec{A}\times\vec{B}$ فيكون اتجاهه باتجاه المحور Z ، وكما هو واضح من الشكل فإن الكمية $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ نتجت من ضرب المركبة C_Z في مساحة متوازي الأضلاع . وبما أن C_Z هي ارتفاع متوازي المستطيلات المتكون من المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ فإن حاصل الضرب الثلاثي العددي يساوي حجم متوازي المستطيلات أي أن :

$$V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \qquad (25)$$

وهذا التفسير الهندسي يوصلنا إلى النتيجة التالية :

$$V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \qquad (26)$$

ويلاحظ أن الترتيب الدوري للمتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ بقي ثابتاً في الحالات الثلاث ، وهو في كل حال يكون مساويا لحجم متوازي المستطيلات . أما إذا غيرنا ترتيب المتجهات في العلاقة (25) فيجب تغير إشارة الضرب وذلك لأن :

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

ومن الجدير بالذكر أن الضرب الثلاثي العددي لا تتغير قيمته إذا حدث تبادل موضعي في علاقتي الضرب العددي والمتجهي أي أنّ :

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B})\vec{C} \qquad (27)$$

ويمكن التعبير عن حاصل الضرب الثلاثي العددي بدلالة مركبات المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \qquad (28)$$

ويكمن أيضا كتابتها بشكل معين :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (29)$$

2 – الضرب الثلاثي المتجهي :

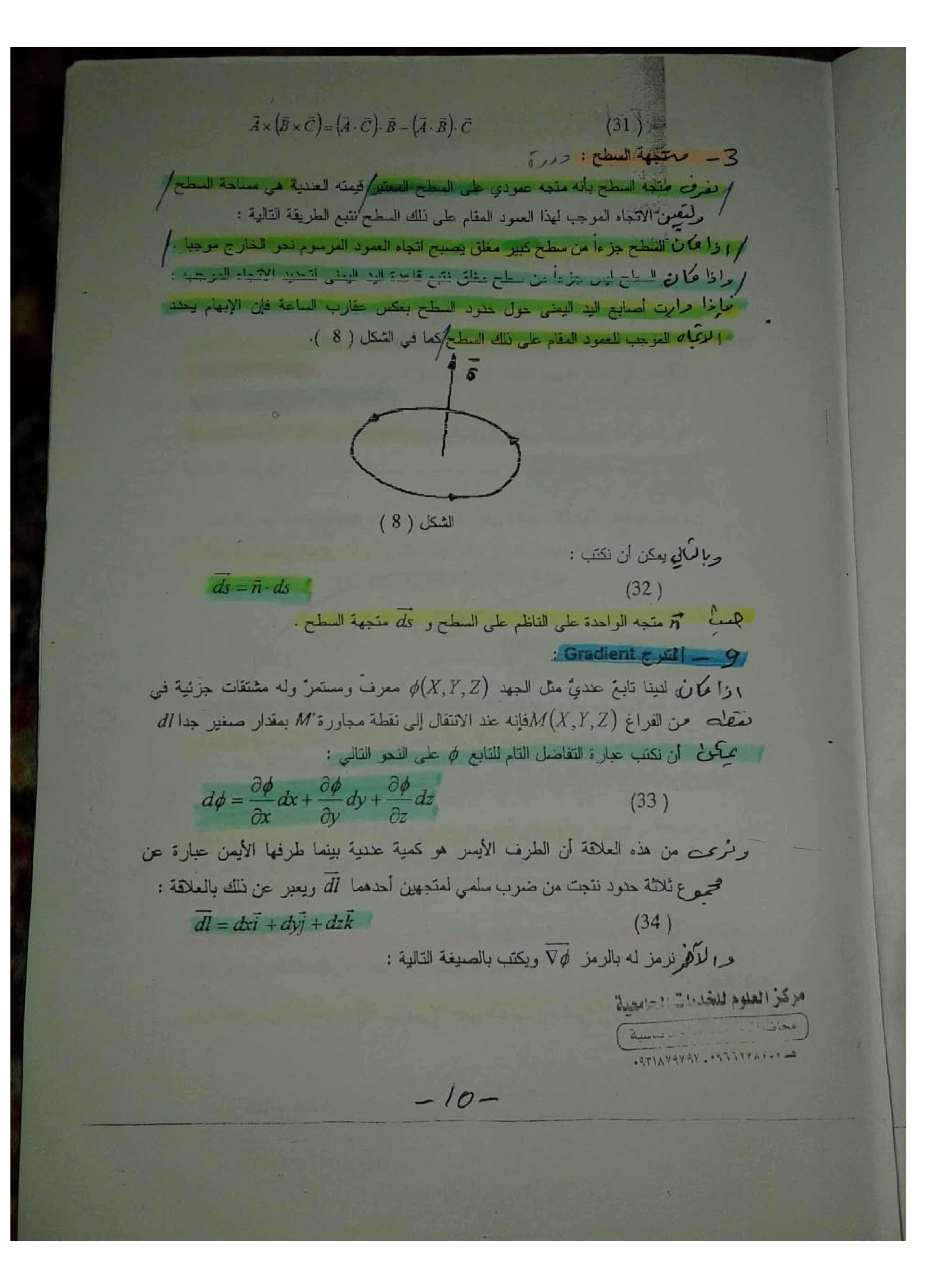
إن عملية الضرب التي تحصل بين المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ ومن الشكل $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ تسمى الضرب الثلاثي المتجهي وإن حاصل الضرب هذا هو مقدار متجه

$$\vec{Q} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \qquad (30)$$

ومن تعريف الضرب المتجهي لمتجهين ينتج أن $\vec{Q}$ عمودي على كل من $\vec{A}$ و $(\vec{B} \times \vec{C})$ وبما أن $(\vec{B} \times \vec{C})$ عمودي على كل من $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ إذا يكون المتجه $\vec{Q}$ واقعا في المستوي الذي يضم المتجهين $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ ويمكن كتابة العلاقة (30) بدلالة مركبات المتجهات على المحاور الإحداثية على النحو التالي :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)(C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k})$$

وبالتالي فان :



$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C} \qquad (31)$$

3 - متجهة السطح : دورة

تعرف متجهة السطح بأنه متجه عمودي على السطح المعتبر قيمته العددية هي مساحة السطح ولتعيين الاتجاه الموجب لهذا العمود المقام على ذلك السطح نتبع الطريقة التالية :

إذا كان السطح جزءاً من سطح كبير مغلق يصبح اتجاه العمود المرسوم نحو الخارج موجباً .

وإذا كان السطح ليس جزءاً من سطح [illegible] نتبع قاعدة اليد اليمنى لتحديد الاتجاه الموجب :

فإذا دارت أصابع اليد اليمنى حول حدود السطح بعكس عقارب الساعة فإن الإبهام يحدد الاتجاه الموجب للعمود المقام على ذلك السطح كما في الشكل (8).

الشكل (8)

وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$\vec{ds}=\vec{n}\cdot ds \qquad (32)$$

حيث $\vec{n}$ متجه الواحدة على الناظم على السطح و $\vec{ds}$ متجهة السطح .

9 - التدرج Gradient :

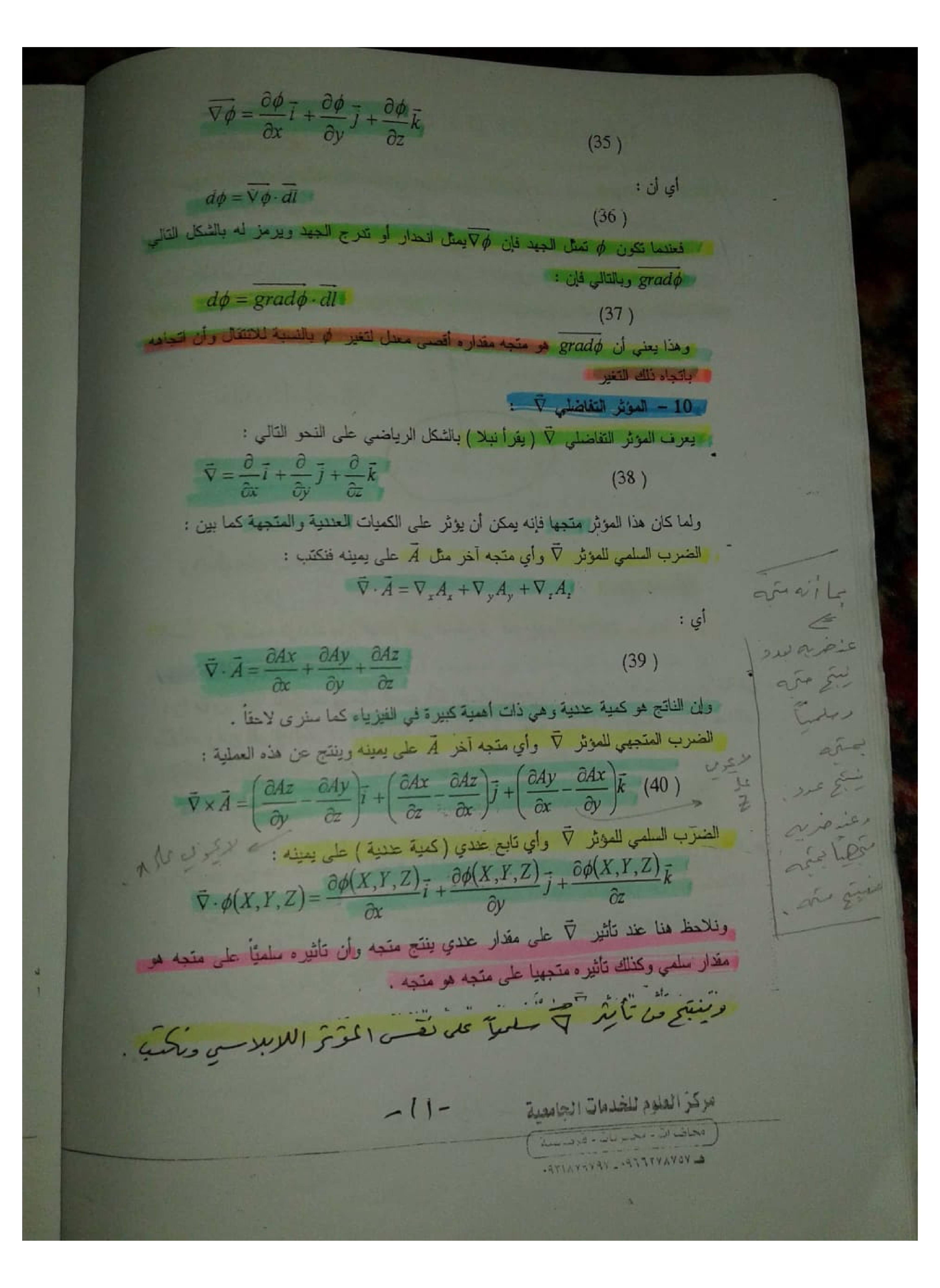
إذا كان لدينا تابع عددي مثل الجهد $\phi(X,Y,Z)$ معرف ومستمر وله مشتقات جزئية في نقطة من الفراغ $M(X,Y,Z)$ فإنه عند الانتقال إلى نقطة مجاورة M' بمقدار صغير جداً dl يمكن أن نكتب عبارة التفاضل التام للتابع ϕ على النحو التالي :

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz \qquad (33)$$

ونرى من هذه العلاقة أن الطرف الأيسر هو كمية عددية بينما طرفها الأيمن عبارة عن مجموع ثلاثة حدود نتجت من ضرب سلمي لمتجهين أحدهما $\vec{dl}$ ويعبر عن ذلك بالعلاقة :

$$\vec{dl}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k} \qquad (34)$$

والآخر نرمز له بالرمز $\vec{\nabla}\phi$ ويكتب بالصيغة التالية :



$$\overrightarrow{\nabla\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k} \qquad (35)$$

أي أن :

$$d\phi = \overrightarrow{\nabla\phi}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad (36)$$

فعندما تكون ϕ تمثل الجهد فإن $\overrightarrow{\nabla\phi}$ يمثل انحدار أو تدرج الجهد ويرمز له بالشكل التالي $\overrightarrow{grad\phi}$ وبالتالي فإن :

$$d\phi = \overrightarrow{grad\phi}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad (37)$$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{grad\phi}$ هو متجه مقداره أقصى معدل لتغير ϕ بالنسبة للانتقال وأن اتجاهه باتجاه ذلك التغير

10 – المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$:

يعرف المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ (يقرأ نبلا) بالشكل الرياضي على النحو التالي :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \qquad (38)$$

ولما كان هذا المؤثر متجها فإنه يمكن أن يؤثر على الكميات العددية والمتجهة كما بين :

الضرب السلمي للمؤثر $\vec{\nabla}$ وأي متجه آخر مثل $\vec{A}$ على يمينه فنكتب :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z$$

أي :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} \qquad (39)$$

وإن الناتج هو كمية عددية وهي ذات أهمية كبيرة في الفيزياء كما سنرى لاحقاً .

الضرب المتجهي للمؤثر $\vec{\nabla}$ وأي متجه آخر $\vec{A}$ على يمينه وينتج عن هذه العملية :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)\bar{k} \qquad (40)$$

الضرب السلمي للمؤثر $\vec{\nabla}$ وأي تابع عددي (كمية عددية) على يمينه :

$$\vec{\nabla}\cdot\phi(X,Y,Z) = \frac{\partial\phi(X,Y,Z)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi(X,Y,Z)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi(X,Y,Z)}{\partial z}\bar{k}$$

ونلاحظ هنا عند تأثير $\vec{\nabla}$ على مقدار عددي ينتج متجه وأن تأثيره سلمياً على متجه هو مقدار سلمي وكذلك تأثيره متجهيا على متجه هو متجه .

وينتج من تأثير $\vec{\nabla}$ سلمياً على نفسه المؤثر اللابلاسي ونكتب .

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

فإذا أثر اللابلاسي على مقدار سلمي $U(X,Y,Z)$ ينتج مقدار سلمي مثل :

$$\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

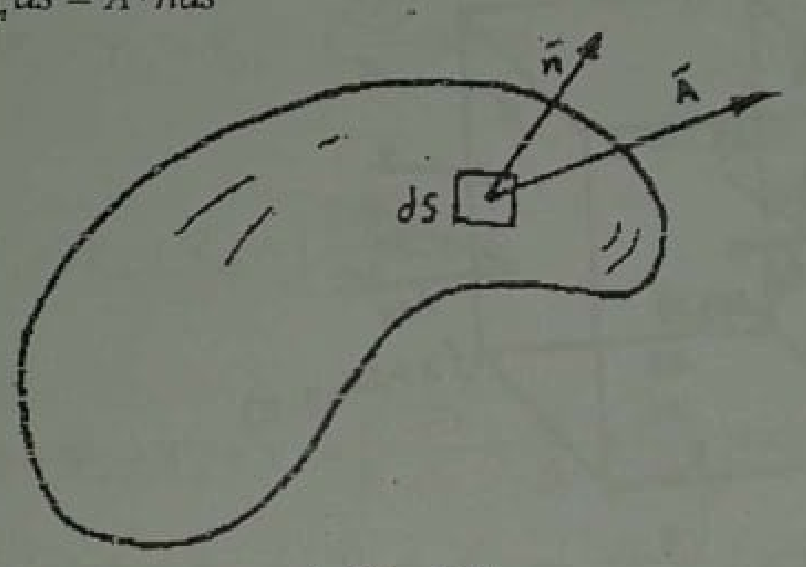
أما إذا أثر على مقدار متجه ينتج مقدار متجه مثل :

$$\nabla^2\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

١) – التكامل السطحي للمجال :

لنفرض أن مجالا متجهيا كثافته $\vec{A}$ يقطع نحو الخارج سطحا مغلقا يحيط بحجم معين V كما في الشكل (9) لمعرفة تدفق المجال (الحقل) الخارج من هذا السطح نفترض أن السطح مجزأ إلى مساحات عنصرية مساحة كل منها ds . نقول بالتعريف : إن التدفق الخارج من هذا السطح التفاضلي يساوي حاصل ضرب مساحة السطح في المركبة الناظمية للحقل $\vec{A}$ العمودية على ذلك السطح أي أن :

$$d\Psi=\overrightarrow{A_n}\,\overrightarrow{ds}=\vec{A}\cdot\vec{n}ds \qquad (41)$$



الشكل (9)

وبالتالي حسب (32) $\overrightarrow{ds}=\vec{n}\cdot ds$ أي أن : $d\Psi=\vec{A}\overrightarrow{ds}$

لحساب التدفق الكلي الذي يقطع المساحة S نكامل العلاقة (41) فنحصل على العلاقة التالية

$$\Psi=\oint_S \vec{A}\overrightarrow{ds} \qquad (42)$$

يسمى التكامل الناتج التكامل السطحي لمركبة الحقل العمودية على جميع أجزاء السطح المغلق . إن إشارة التكامل تعتمد على الزاوية المحصورة بين $\vec{ds}$ و $\vec{A}$ حيث تكون الإشارة موجبة عندما يرسم العمود نحو خارج السطح

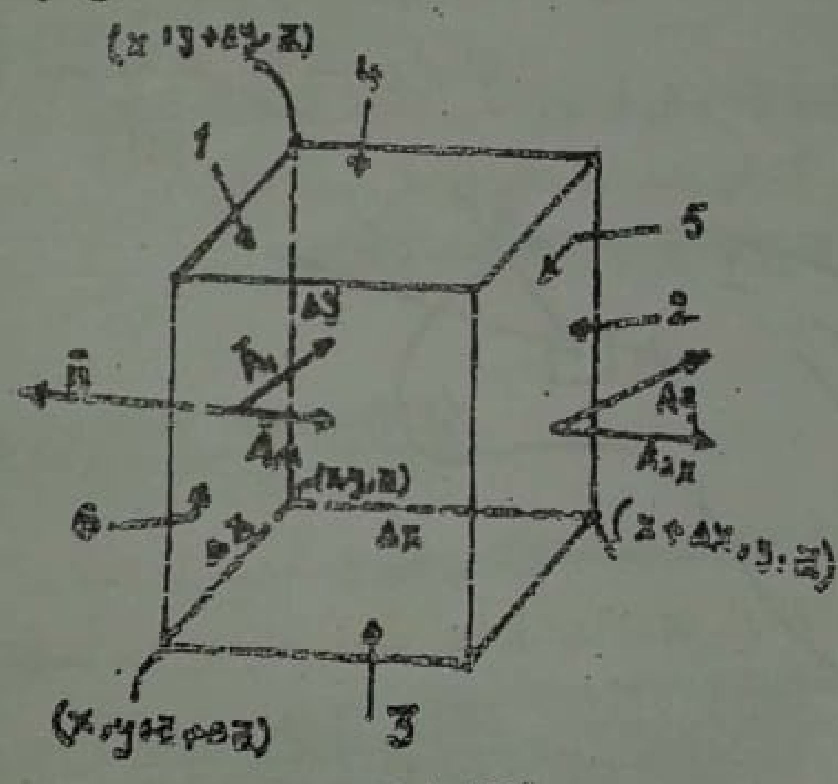
12 - تفرق الحقل ومبرهنة غاوس :

عند دراسة المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ بينا أن تأثير المؤثر $\vec{\nabla}$ على متجه $\vec{A}$ يعطى بالعلاقة (35 (تسمى هذه القيمة العددية تفرق الحقل أو تباعد الحقل $\vec{A}$) ($\vec{A}$ Divergence) ونكتب ذلك بصورة مختصرة $div\vec{A}$ أي أن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}=div\vec{A} \qquad (43)$$

تستخدم هذه العلاقة في مجالات مختلفة وخاصة في علم الموائع (Hydrodynamics)

- لنحسب الآن تدفق الحقل $\vec{A}$ الخارج عن سطح مغلق يحصر حجماً لا متناهياً في الصغر ، ولنفرض للسهولة أن هذا الحجم هو مكعب صغير أبعاده $\Delta z , \Delta y , \Delta x$ وأن أضلاعه توازي المحاور الإحداثية المتعامدة (X , Y , Z) على الترتيب كما موضح في الشكل (10).



الشكل (10)

لحساب التدفق الخارج من المكعب يجب أن نحسب التدفق الخارج من كل وجه من أوجه المكعب من الشكل لنحسب التدفق الخارج من الوجه 1 العمودي على المحور X وهذا التدفق يساوي التكامل السطحي لمركبة الحقل $\vec{A}_{1X}$:

$$\Psi_{1x}=-\int A_{1x}dy\cdot dz \qquad (44)$$

الإشارة السالبة هنا لأن التدفق يجتاز السطح وذلك لأن الاتجاه الموجب للناظم على هذا السطح هو عكس اتجاه المحور OZ .

أما التدفق من خلال السطح 2 المقابل للسطح السابق فنجد أن المركبة Z للحقل $\vec{A}$ قد ازدادت بمقدار dz وأن الجهة الموجبة للناظم هي جهة المحور OZ أي أن :

$$\Psi_{2x} = \int A_{2x} dy \cdot dz \qquad (45)$$

ان المركبة A_{2x} تختلف قليلاً عن المركبة A_{1x} أي يمكننا كتابة العلاقة التالية :

$$A_{2x} = A_{1x} + \frac{\partial Ax}{\partial x} dx \qquad (46)$$

ولقد أهملنا الحدود التي تتضمن $(\Delta x)^2$ فما فوق وذلك لصغر الكمية (Δx) وبالتالي فإن :

$$\Psi_{2x} = \int \left(A_{1x} + \frac{\partial Ax}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \qquad (47)$$

أي أن محصلة التدفق الخارج من الوجهين 1 و 2 باتجاه المحور X هو :

$$\Psi_x = \Psi_{1x} + \Psi_{2x} = \int \frac{\partial Ax}{\partial x} dxdydz \qquad (48)$$

وباتباع نفس الطريقة نحسب التدفق الخارج من الوجهين $3 , 4$ باتجاه المحور Y فنجد

$$\Psi_y = \Psi_{1y} + \Psi_{2y} = \int \frac{\partial Ay}{\partial y} dxdydz \qquad (49)$$

وكذلك بالنسبة للوجهين $5 , 6$ نجد :

$$\Psi_z = \Psi_{1z} + \Psi_{2z} = \int \frac{\partial Az}{\partial z} dxdydz \qquad (50)$$

وبالتالي فإن :

$$\Psi = \Psi_x + \Psi_y + \Psi_z = \int \left(\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} \right) dxdydz \qquad (51)$$

في هذه العلاقة فإن مجموع المشتقات ليس إلا $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ وأن $dxdydz = dv$ هو حجم المكعب وبالتالي نكتب

$$\Psi = \int \vec{A}\vec{ds} = \int \left(div\vec{A} \right) \cdot dv \qquad (52)$$

أي أن .

$$\int \vec{A}\vec{ds} = \int div\vec{A}\, dv \qquad (53)$$

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية : إن تكامل المركبة العمودية لأي متجه على سطح مغلق يساوي تكامل تفرق (تباعد) حقل ذلك المتجه بالنسبة لجميع أجزاء الحجم المحاط بذلك السطح وهو ما يمسى مبرهنة غاوس .

13 – مبرهنة غرين Green's Theorem :

تستخدم مبرهنة غاوس كثيرا في الفيزياء والرياضيات حيث نستطيع بواسطتها الحصول على الكثير من التحويلات التي تلزم في دراسة هذين الفرعين من العلوم . لنفرض على سبيل المثال انه لدينا تابعين سلميين $u\ (X,Y,Z)$ و $v\ (X,Y,X)$ ولنفرض أن هناك حقل متجه $\vec{A}$ يعطى على النحو التالي

$$\vec{A} = u\vec{\nabla}v \qquad (54)$$

لنجعل المؤثر $\vec{\nabla}$ يؤثر على طرفي العلاقة السابقة فنجد :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\left(u\vec{\nabla}v\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{A} = u\nabla^2 v+\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v \qquad (55)$$

فإذا عوضنا قيمة $\vec{\nabla}\vec{A}$ بقيمتها من مبرهنة غاوس نحصل على العلاقة التالية :

$$\int_s\left(u\vec{\nabla}v\right)\cdot\overrightarrow{ds}=\int_v\left(u\nabla^2 v+\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\right)dv \qquad (56)$$

وهذا ما يمسى بمبرهنة غرين الأولى وإذا بدلنا بين وضعي u , v في العلاقة (54) أي تحل أحدهما مكان الأخرى يكون :

$$\int_s\left(v\vec{\nabla}u\right)\cdot\overrightarrow{ds}=\int_v\left(v\nabla^2 u+\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\right)dv \qquad (57)$$

وبطرح العلاقة (56) من العلاقة (57) نجد :

$$\int_s\left(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u\right)\cdot\overrightarrow{ds}=\int_v\left(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u\right)dv \qquad (58)$$

وهو ما يعرف بمبرهنة غرين الثانية .

14 – التكامل الخطي للحقل المتجه Line Integral Of Vector Field :

نعرف التكامل الخطي للحقل المتجه $\vec{A}$ وفق العلاقة التالية : $\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$

حيث a , b هما نقطتا البداية والنهاية على المنحنى C الذي ينجز عليه التكامل و $\overrightarrow{dl}$ هو الانتقال العنصري (التفاضلي) على هذا المنحني . وللحصول على التكامل الخطي نقسم المنحني بين النقطتين a , b إلى عدد لا متناهٍ من الانتقالات العنصرية المتجهة $\overrightarrow{dl_i}$ ثم تجري بعد ذلك عملية الضرب السلمي للمتجه $\vec{A}_i$ مع المتجه $\overrightarrow{dl_i}$ ومن ثم نجمع النتائج من حاصل الضرب العددي المذكور .

ويعرف التكامل الخطي بأنه النهاية التي يصل إليها هذا الجمع عندما يتناهى عدد المتجهات العنصرية من اللانهاية حتى يقترب كل منها إلى الصفر وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{A}_i\cdot\overrightarrow{dl_i} \qquad (59)$$

يجب أن نشير هنا إلى أن التكامل الخطي لا يعتمد فقط على نقطتي البداية والنهاية وإنما يعتمد أيضا على المنحني C . أما بالتكامل الخطي حول أي منحني مغلق C فقد يساوي صفراً أو لا يساوي الصفر ، وتزداد أهمية هذا التكامل إذا أصبح مساويا للصفر إذ أنه في هذه الحالة يتعلق فقط بوضعي النقطتين a , b ونكتب :

$$\oint \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = 0 \qquad (60)$$

وفي حال عدم تساوي التكامل مع الصفر نرمز له بالرمز $\oint_c \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$ وباستخدام مركبات المتجهين $\overrightarrow{dl}$ و $\vec{A}$ في المحاور الإحداثية المتعامدة . نستطيع أن نكتب :

$$\oint_c \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_c \left(A_x d_x + A_y d_y + A_z d_z\right) \qquad (61)$$

فإذا فرضنا على سبيل المثال أن المتجه $\vec{A}$ هي قوة تؤثر على جسيم متحرك ، فإن التكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \qquad (62)$$

حيث ϕ هي تابع سلمي ، إذاً فإن عملية التكامل الخطي لهذا المتجه بين النقطتين a , b الواقعتين على منحنٍ معين ضمن مجال هذا المتجه يساوي :

$$\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_a^b \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\overrightarrow{dl} = \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right) \qquad (63)$$

ونلاحظ أن المقدار ضمن القوسين ليس إلا عبارة التفاضل التام للتابع ϕ ، إذاً نعيد كتابة العلاقة السابقة :

$$\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_a^b d\phi = \phi_b - \phi_a$$

حيث أن ϕ_a و ϕ_b هي متجها التابع ϕ عند النقطتين a , b على التوالي . ومن هنا نستنتج أن التكامل الخطي لتدرج أي تابع سلمي ولها تفاضل تام يساوي صفراً إذا أنجز التكامل حول منحى مغلق . أي أن نقل حقل متجه محافظ $\vec{A}$ يوجد تابع سلمي ϕ تعرف بتابع جهد الحقل تعطى بالعلاقة (62) .

لنأخذ الآن المنحني المغلق الموضح بالشكل (11) ، وبفرض أن التكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ حول هذا المنحني يساوي الصفر إذاً يمكن أن نكتب :

$$\oint_c \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{acb} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_{bda} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{acb} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} - \int_{adb} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = 0$$

إذاً :

$$\int_{acb} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{adb} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$$

الشكل (11)

أي أن التكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ من a إلى b لا يعتمد على المسار وإنما فقط على موضع النقطتين a , b أي أن :

$$\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = \phi_b - \phi_a$$

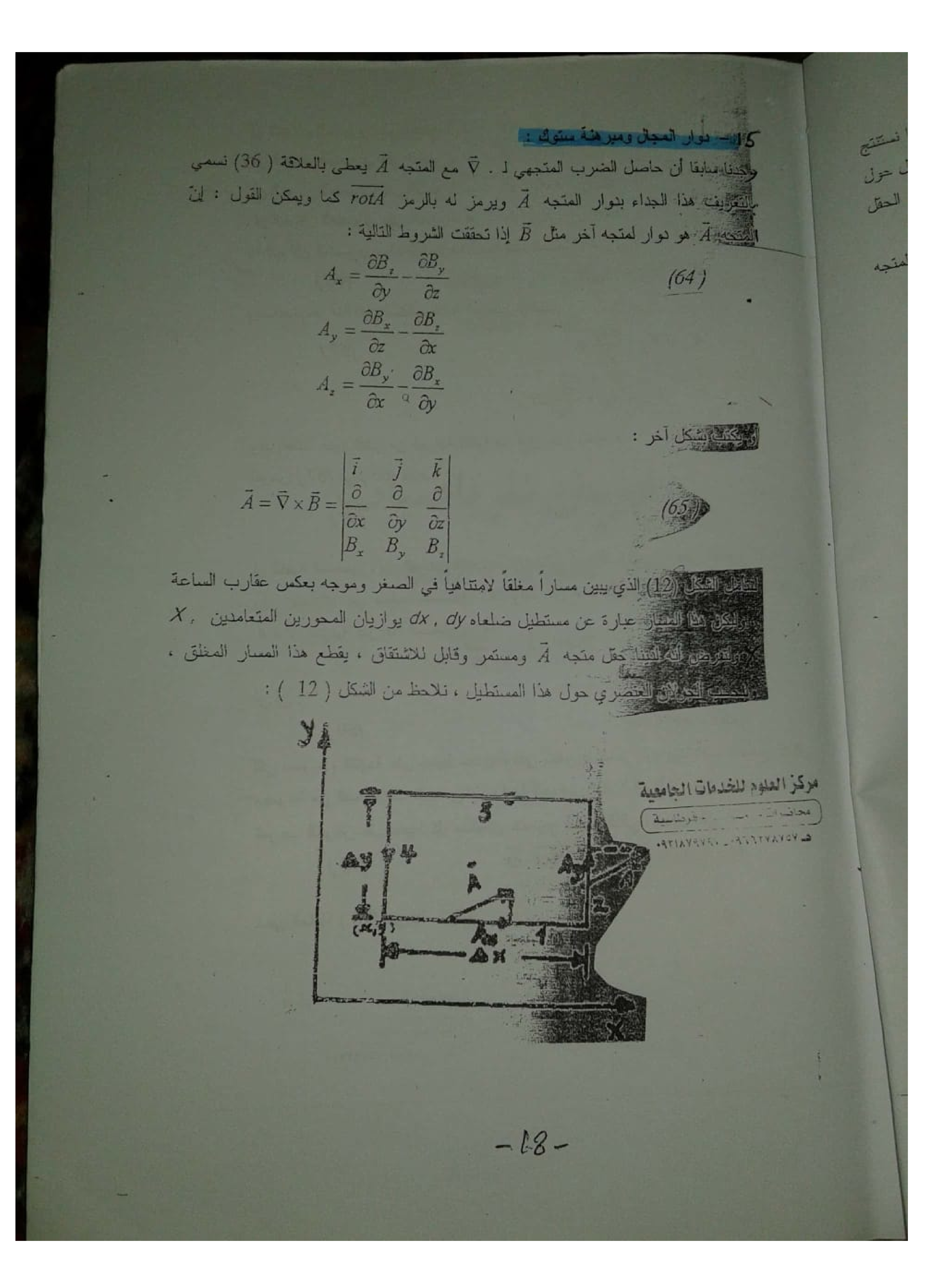
وإذا اعتبرنا أن a , b قريبتان جداً من بعضهما أمكننا ذلك أن نكتب العلاقة التالية :

$$\vec{A}\cdot\overrightarrow{dl} = d\phi = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\overrightarrow{dl}$$

أو :

$$(\vec{A} - \vec{\nabla}\phi)\cdot\overrightarrow{dl} = 0$$

وبما أن هذه العلاقة تصحُّ في كل الاتجاهات فيجب أن تكون كل مركبة من مركبات المتجهة $(\vec{A} - \vec{\nabla}\phi)$ في أي اتجاه مساوية للصفر وهذا يعني أن $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ وهكذا نستنتج أن التكامل الخطي للمتجه $\vec{A}$ حول أيِّ منحنٍ مغلق يساوي الصفر إذا كان هذا المتجه هو تدرج لتابع سلمي مثل $\phi(X,Y,Z)$.



5 - دوار المجال ومبرهنة ستوك :

وجدنا سابقا أن حاصل الضرب المتجهي لـ $\vec{\nabla}$ مع المتجه $\vec{A}$ يعطى بالعلاقة (36) نسمي بالتعريف هذا الجداء بدوار المتجه $\vec{A}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{rotA}$ كما ويمكن القول : إنّ المتجه $\vec{A}$ هو دوار لمتجه آخر مثل $\vec{B}$ إذا تحققت الشروط التالية :

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \qquad (64)$$

$$A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

أو يكتب بشكل آخر :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (65)$$

لنتأمل الشكل (12) الذي يبين مساراً مغلقاً لامتناهياً في الصغر وموجه بعكس عقارب الساعة وليكن هذا المسار عبارة عن مستطيل ضلعاه dx , dy يوازيان المحورين المتعامدين X , Y ولنفرض أنه لدينا حقل متجه $\vec{A}$ ومستمر وقابل للاشتقاق ، يقطع هذا المسار المغلق ، ولنحسب الجولان العنصري حول هذا المستطيل ، نلاحظ من الشكل (12) :

أن الجولان العنصري على الضلع 1 هو : $dG_{1x} = A_{1x} \cdot dx$

وأن الجولان العنصري على الضلع 2 هو : $dG_{2y} = A_{2y} \cdot dy$

وأن الجولان العنصري على الضلع 3 هو : $dG_{3x} = -A_{3x} \cdot dx$

وأن الجولان العنصري على الضلع 4 هو : $dG_{4y} = -A_{4y} \cdot dy$

إذاً الجولان العنصري حول الأضلاع الأربعة لهذا المستطيل تساوي :

$$dG = (A_{1x} - A_{3x})dx + (A_{2y} - A_{4y})dy \qquad (66)$$

وباستخدام مبرهنة تايلر نستطيع كتابة العلاقتين التاليتين :

$$A_{3x} = A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}dy \qquad (67)$$

$$A_{2y} = A_{4y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}dx$$

وهنا أهملنا حدود النشر من المرتبة الثانية فما فوق نظرا لصغرها .

نعوض (67) في (66) فنجد :

$$dG = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdy \qquad (68)$$

إن الكمية المحصورة بين القوسين ليست سوى مركبة $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ المحمولة على المحور Z .

وإن $dx\ dy$ هي مساحة المستطيل ds ولما كان المستطيل واقعاً في المستوي XY فإن $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ عمودية على هذا المستطيل ، إذاً :

$$dG = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \overrightarrow{ds}$$

أي أن :

$$dG = \overrightarrow{rotA} \cdot \overrightarrow{ds} \qquad (69)$$

لكي نعمم هذه النتيجة على محيط محدود وعلى سطح s يستند عليه فإننا نقسم السطح S إلى مجموعة من المستطيلات العنصرية الموازية للمحاور الإحداثية ونأخذ بعين الاعتبار الاتجاه الموجب للجولان على محيط كل مستطيل عنصري فيها وبالتالي نحصل على :

$$G = \int dG = \oint_c \vec{A}.\vec{dl} = \iint_s \overrightarrow{rotA} \cdot \overrightarrow{ds} \qquad (70)$$

تدعى العلاقة (70) مبرهنة ستوكس.

١٥- معادلة الأبعاد والوحدات:

يسمي الفيزيائيون الوحدات الفيزيائية التي تقاس بوساطتها المقادير الفيزيائية أبعاد المقدار مثلاً: أبعاد السرعة هي المسافة/الزمن، وأبعاد التسارع المسافة/مربع الزمن، وقد صنفت الوحدات الفيزيائية إلى وحدات أساسية وأخرى مشتقة.

إن أكثر جمل الوحدات استخداماً هي جملة الوحدات الدولية (SI) ويعبر عن وحدة الطول بالمتر (m) ووحدة الكتلة بالكيلو غرام (Kg) أما وحدة الزمن فهي الثانية (s).

بالنسبة للوحدات الفيزيائية الأساسية يمكن إجمالها بما يلي:

- الكتلة (M) وتقدر بالكيلو غرام (Kg).
- الطول (L) ويقدر بالمتر (m).
- الزمن (t) ويقدر بالثانية (s).
- التيار الكهربائي (I) ويقدر بالأمبير (A).
- درجة الحرارة المطلقة (T) وتقدر بالكلفن (K).
- كمية المادة وتقدر بالجزيء الغرامي مول (mol).
- شدة الإضاءة وتقدر بالكاندل (cdSZ).

أما الوحدات الأخرى المشتقة من الوحدات الفيزيائية الأساسية نذكر منها:

- القوة (F) وتقدر بوحدة هي النيوتن (N) = ($Kg\ m/s^2$).
- الكتلة الحجمية (ρ) تقدر بوحدة هي (Kg/m^3).

نتبع الخطوات التالية لإيجاد معادلات الأبعاد لقانون فيزيائي:

1- نرمز L للطول، T الزمن، M الكتلة.

إذا كان المقدار F يتناسب مع الأسس α، β، γ للمقادير A، B، C فيعبر عن

معادلة الأبعاد بالعلاقة :

$$(F) = (A)^{\alpha}\ (B)^{\beta}\ (C)^{\gamma}$$

ويقال اختصاراً أن F لها أبعاد α ، β ، γ بالنسبة للمقادير A ، B ، C .

2- يجب أن تظهر نفس الأبعاد بين طرفي العلاقة الرياضية، فإن تحقق ذلك نقول إن العلاقة صحيحة وإلا فهذا يعني وجود خطأ في العلاقة الرياضية التي تصف مقدار فيزيائي ما .

مثال : يحسب دور النواس البسيط بالعلاقة التالية :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

حيث : L – طول النواس ، g – تسارع الجاذبية الأرضية .

إن معادلة الأبعاد لهذه العلاقة هي :

$$T = \sqrt{\frac{L}{L.T^{-2}}} = T$$

هذا يعني أن العلاقة التي تعطي دور النواس صحيحة .

Scanned by CamScanner

تمارين محلولة

1) إذا كان $U\,(x,y,z), V\,(x,y,z)$ مقدارين سلميين ، $\vec{A}\,(x,y,z)$ مقدار متجهة . أثبت صحة العلاقات التالية :

a) -

$$\vec{\nabla}(U.V)=U\vec{\nabla}V+V\vec{\nabla}U$$

الحل :

من تعريف الفرع :

$$\vec{\nabla}(U+V)=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(U.V)+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(U.V)+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(U.V)$$

$$\vec{\nabla}(U.V)=\vec{i}\left(\frac{\partial U}{\partial x}V+U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial U}{\partial y}V+U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial U}{\partial z}V+U\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}(U.V)=U\left(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial V}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)+V\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

نلاحظ أن الحدود ضمن الأقواس تمثل $\overrightarrow{grad}\,U , \overrightarrow{grad}\,V$ على الترتيب إذاً :

$$\vec{\nabla}(U.V)=U\vec{\nabla}V+V\vec{\nabla}U$$

b) -

$$div\,(V.\vec{A})=V div\,\vec{A}+\overrightarrow{grad}\,V.\vec{A}$$

الحل :

بالاستفادة من العلاقة:

$$div\,(V.\vec{A})=\vec{\nabla}(V.\vec{A})$$

$$=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(V.x\,\vec{i}+V.y\,\vec{j}+V.z\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial (V x)}{\partial x} + \frac{\partial (V y)}{\partial y} + \frac{\partial (V z)}{\partial z}$$

$$= V\frac{\partial X}{\partial x} + V\frac{\partial Y}{\partial y} + V\frac{\partial Z}{\partial z} + X\frac{\partial V}{\partial x} + Y\frac{\partial V}{\partial y} + Z\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= V\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \left(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\operatorname{div}(V.\vec{A}) = V \operatorname{div}\vec{A} + \vec{\nabla} V.\vec{A}$$

2) بفرض :

$$\vec{A} = X^3Z^2\,\vec{i} - 3XY^2Z^2\,\vec{j} + 2X^2Y^2Z^2\,\vec{k}$$

احسب قيمة $\operatorname{div}\vec{A}$ وكذلك $\operatorname{rot}\vec{A}$ في النقطة $P(-1,1,1)$.

الحل :

من تعريف التفرق :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(X^3Z^2\,\vec{i} - 3XY^2Z^2\,\vec{j} + 2X^2Y^2Z^2\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(X^3Z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-3XY^2Z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2X^2Y^2Z^2)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3X^2Z^2 - 6XYZ^2 + 4X^2Y^2Z$$

عند النقطة $P(-1,1,1)$ ينتج :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3(-1)^2(1)^2 - 6(-1)(1)(1)^2 + 4(-1)^2(1)^2(1)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3 + 6 + 4 = 13$$

من تعريف دوار متجه لدينا :

$$\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X^3Z^2 & 3XY^3Z^3 & 2X^2Y^2Z^3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{\partial(2X^2Y^2Z^3)}{\partial y} - \frac{\partial(-3XY^3Z^3)}{\partial z}\right]\vec{i} +$$

$$+\left[\frac{\partial(X^3Z^2)}{\partial z} - \frac{\partial(2X^2Y^2Z^3)}{\partial x}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial(-3XY^3Z^3)}{\partial x} - \frac{\partial(X^3Z^2)}{\partial y}\right]\vec{k}$$

$$= (4X^2YZ^3 + 9XY^3Z^2)\vec{i} + +(2X^3Z - 4XY^2Z^3)\vec{j} + (-3Y^3Z^3)\vec{k}$$

بالتعويض عند النقطة $P(-1,1,1)$ ينتج :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

3) إذا كان : $V(x,y,z) = 2y^2z - x^3y^2$

أوجد قيمة $\overrightarrow{\text{grad}\,V}$ في النقطة $P(2,-1,-1)$.

الحل :

لأجل النقطة $P(2,-1,-1)$ ينتج :

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial(2Y^2Z - X^3Y^2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(2Y^2Z - X^3Y^2)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(2Y^2Z - X^3Y^2)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}V = (-3X^2Y^2)\vec{i} + (4YZ - 2X^3Y)\vec{j} + (2Y^2)\vec{k}$$

عند النقطة $P(2,-1,-1)$ ينتج :

$$\vec{\nabla}V = -12\vec{i} + 20\vec{j} + 2\vec{k}$$

مسائل

1 - أثبت صحة المتطابقات التالية :

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A} + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A} + \phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\psi\phi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

2 - إذا كان $\vec{A}$ متجهاً معرفاً ومستمراً وكذلك مشتقاته فأثبت أن : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

3 - احسب التكامل الخطي $\int \vec{A}\cdot d\vec{l}$ بين النقطتين $(0 , 0 , 0)$ و $(1 , 1 , 1)$ الواقعتين على المنحني الممثل بالمعادلة : $\vec{l} = \hat{i}t + \hat{j}t^2 + \hat{k}t^3$ علما بأن المتجه $\vec{A}$ هو $\vec{A} = \hat{i}xy - \hat{j}z^2 + \hat{k}xyz$

4 - إذا كان المتجه $\vec{A}$ يمثل بالمعادلة : $\vec{A} = \hat{j}x + \hat{k}y$ فتحقق من صحة مبرهنة ستوكس لمربع طول ضلعه a رسم في المستوي X , Y مركزه في نقطة الأصل وأضلاعه بموازاة المحورين المتعامدين

5 - استعن بمبرهنة غاوس لحساب الشحنة الكلية داخل مكعب طول ضلعه ($2\ cm$) وإحدى زواياه في نقطة الأصل وأضلاعه موازية للمحاور المتعامدة X , Y , Z علما بأن متجه الحقل الكهربائي $\vec{E} = \hat{i}\,2ax^2$ حيث a كمية ثابتة .

6 - أوجد متجهة الواحدة العمودية على السطح $z = x^2 + y^2$ في النقطة $(1 , 2 , 4)$

7 - احسب تدفق المتجه $\vec{A} = 2\hat{i} - 3x\hat{j} + y\hat{k}$ الخارج من المستوي $4x + 3y + 12z = 12$ الواقع في الربع الأول .

8 - أثبت مبرهنة غاوس للحقل المتجه $\vec{A} = y\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k}$ ولجزء الاسطوانة الواقع في الربع الأول والمحصور بين الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ والمستويين $z = 0$ و $z = a$